Anul matematicii în şcoala românească

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE LAZĂR"
Ediţia a XI-a, 20-22 martie 2010
SIBIU

CLASA VIII-a

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia $AB = 2a$, iar M, N şi P mijloacele muchiilor $[AB], [BC]$, respectiv $[DD']$. Să se determine perimetrul şi aria secţiunii formate de planul (MNP) în cubul dat.

E:13918, GM. Nr 11/2009

2. Determinaţi numerele reale $x_i, i = \overline{1, n}, n \geq 2$, ştiind că $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$ şi

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{n-1}{2n} a^2, a \in \mathbb{R}.$$

Dumitru Acu, Sibiu

3. Dacă $a, b, c \in [0, 1]$ şi $ab + bc + ca = 1$, atunci demonstraţi inegalitatea

$$(a+b)(b+c)(c+a) < \frac{4}{3}(a+b+c)$$

Emil C. Popa, Sibiu

4. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară oarecare şi D, E, F puncte situate pe segmentele AB, BC, AC astfel ca:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BE}{EC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CF}{FA} = \frac{1}{4}.$$

Dacă notăm cu $\mathcal{V}_{SABC}$ volumul piramidei $SABC$, arătaţi că

$$\frac{\mathcal{V}_{SDEF}}{\mathcal{V}_{SABC}} > \frac{2}{5}$$

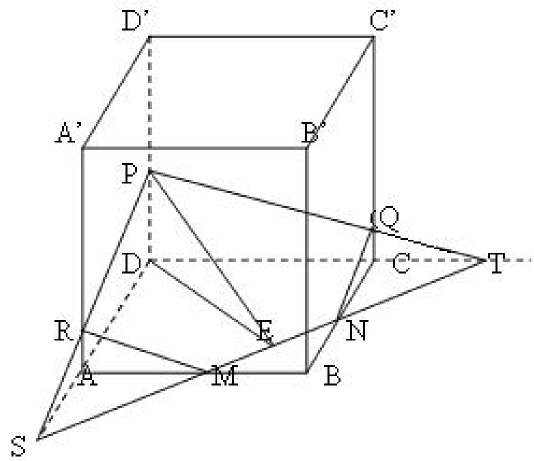
Petrică Dicu, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA VIII-a
BAREM DE CORECTARE

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia $AB = 2a$, iar M, N şi P mijloacele muchiilor $[AB], [BC]$, respectiv $[DD']$. Să se determine perimetrul şi aria secţiunii formate de planul (MNP) în cubul dat.

E:13918, GM. Nr 11/2009



Soluţie Fie $\{T\} = MN \cap CD$
$\{S\} = MN \cap AD$
$\{R\} = AA' \cap SP$
$\{Q\} = CC' \cap PT$

Deci secţiunea formată de planul (MNP) în cubul dat este $MNQPR$. 1p
Din M şi N mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[BC]$ obţinem $\triangle ASM \equiv \triangle MBN \equiv \triangle NCT$ ($\widehat{SAM} = \widehat{MBN} = \widehat{NCT} = 90°, AM = MB = BN = NC = a$), deci $SM = MN = NT = a\sqrt{2}$. 1p
Din $\triangle ARS \equiv \triangle ARM$ ($\widehat{SAR} = \widehat{MAR} = 90°, AR$ latura comuna) obţinem $RM = RS$.
Analog $\triangle NCQ \equiv \triangle TCQ$ ($\widehat{NCQ} = \widehat{TCQ} = 90°, CQ$ latura comuna) obţinem $NQ = QT$.
Avem $SD = 2a + a = 3a = TD$.
Din $\triangle SDP \equiv \triangle TDP (C.C.) \Rightarrow \quad SP = PT = a\sqrt{10}$
Dar $\triangle SAR \sim \triangle SDP (AR || PD) \Rightarrow \dfrac{SA}{SD} = \dfrac{AR}{PD} = \dfrac{SR}{SP} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{AR}{a} = \dfrac{SR}{a\sqrt{10}}$.
Deci $AR = \dfrac{a}{3} \Rightarrow RP = \dfrac{2}{3} \cdot SP = \dfrac{2a}{3}\sqrt{10} = PQ$ 1p
Prin urmare

$$\begin{aligned} P_{MNQPR} &= MN + NQ + QP + PR + RM \\ &= MN + PT + PS \\ &= MN + 2PS \\ &= a\sqrt{2} + 2a\sqrt{10} \\ &= a\sqrt{2}(1 + 2\sqrt{5}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p \end{aligned}$$

Fie E mijlocul lui ST. Triunghiul SDT este dreptunghic isoscel, deci $ST^2 = SD^2 + DT^2 = 9a^2 + 9a^2 = 18a^2$ adică $ST = 3a\sqrt{2}$ şi $DE = SE = ET\dfrac{ST}{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$, $DE \perp ST$.
Din teorema celor trei perpendiculare:

$$\left.\begin{array}{l} PD \perp (SDT) \\ DE \subset (SDT) \\ DE \perp ST \\ ST \subset (SDT) \end{array}\right\} \Rightarrow PE \perp ST$$

$\triangle PDE$ dreptunghic $\Rightarrow PE^2 = PD^2 + DE^2 = a^2 + \dfrac{9a^2 \cdot 2}{4} = \dfrac{22a^2}{4}$, deci $PE = \dfrac{a\sqrt{22}}{2}$.
Aria $\triangle SPT = \dfrac{ST \cdot PE}{2} = \dfrac{3a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{22}}{4} = \dfrac{3a^2 \cdot 2\sqrt{11}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{11}}{2}$ 1p
Deoarece $\triangle SRM \sim \triangle SPT \Rightarrow \dfrac{SR}{SP} = \dfrac{SM}{ST} = \dfrac{1}{3}$.
Cum $\triangle SRM \equiv \triangle NQT$ obţinem $\dfrac{\mathcal{A}_{\triangle SRM}}{\mathcal{A}_{\triangle SPT}} = \dfrac{1}{9} = \dfrac{\mathcal{A}_{\triangle NQT}}{\mathcal{A}_{\triangle SPT}}$ .... $1p$
Deci $\mathcal{A}_{MNQPR} = \mathcal{A}_{\triangle SPT} - 2\mathcal{A}_{\triangle SRM} = \mathcal{A}_{\triangle SPT} - \dfrac{2}{9}\mathcal{A}_{\triangle SPT} = \dfrac{7}{9}\mathcal{A}_{\triangle SPT} = \dfrac{7}{9}\dfrac{3a^2\sqrt{11}}{2} =$
$= \dfrac{21a^2\sqrt{11}}{18} = \dfrac{7a^2\sqrt{11}}{6}$ 1p

TOTAL **7p**

2. Determinaţi numerele reale $x_i, i = \overline{1,n}, n \geq 2$, ştiind că $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$ şi

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j = \frac{n-1}{2n} a^2, a \in \mathbb{R}.$$

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie Avem $(n-1)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2n \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j = (n-1)a^2 - (n-1)a^2 = 0$ 2p

De aici obţinem $(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2 + 2(n-1)\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j - 2n \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j = 0$ 2p

sau $(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j = 0$ 1p

sau $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j)^2 = 0$ 1p

Din ultima inegalitate obţinem $x_1 = x_2 = ... = x_n$ iar din $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$

găsim $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{a}{n}$ 1p

TOTAL **7p**

3. Dacă $a, b, c \in [0,1]$ şi $ab + bc + ca = 1$, atunci demonstraţi inegalitatea

$$(a+b)(b+c)(c+a) < \frac{4}{3}(a+b+c)$$

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie Avem $1 + a^2 = (a+b)(a+c)$, $1 + b^2 = (b+a)(b+c)$,
$1 + c^2 = (c+a)(c+b)$ 2p

$\dfrac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$

$= \dfrac{1}{(a+b)(b+c)} + \dfrac{1}{(b+c)(c+a)} + \dfrac{1}{(c+a)(a+b)}$ 2p

$\dfrac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{1+c^2} > \dfrac{3}{2}$ 2p

În concluzie $(a+b)(b+c)(c+a) < \dfrac{4}{3}(a+b+c)$ 1p

TOTAL **7p**

4. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară oarecare şi D, E, F puncte situate pe segmentele AB, BC, AC astfel ca:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BE}{EC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CF}{FA} = \frac{1}{4}.$$

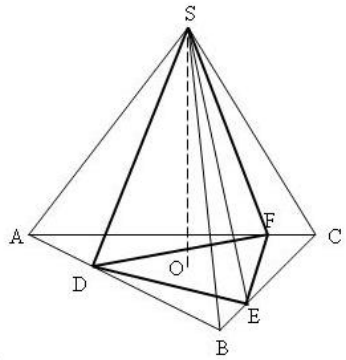
Dacă notăm cu $\mathcal{V}_{SABC}$ volumul piramidei $SABC$, arătaţi că

$$\frac{\mathcal{V}_{SDEF}}{\mathcal{V}_{SABC}} > \frac{2}{5}$$

Petrică Dicu, Sibiu

Soluţie Notăm cu $\mathcal{A}_{ABC}$ aria triunghiului ABC şi fie $SO \perp (ABC), O \in (ABC)$.

Avem



(1) $$\mathcal{V}_{SDEF} = \frac{\mathcal{A}_{DEF} \cdot SO}{3}$$

(2) $$\mathcal{V}_{SABC} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot SO}{3}$$

Din (1) şi (2) obţinem

(3) $$\frac{\mathcal{V}_{SDEF}}{\mathcal{V}_{SABC}} = \frac{\mathcal{A}_{DEF}}{\mathcal{A}_{ABC}}$$

.... 1p

Avem $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{DEF} + \mathcal{A}_{ADF} + \mathcal{A}_{BDE} + \mathcal{A}_{CEF}$ 1p

de unde $\quad \dfrac{\mathcal{A}_{DEF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - \dfrac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{ABC}} - \dfrac{\mathcal{A}_{BDE}}{\mathcal{A}_{ABC}} - \dfrac{\mathcal{A}_{CEF}}{\mathcal{A}_{ABC}}$ 1p

(4) $$\frac{\mathcal{A}_{DEF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - \sum_{cyclic} \frac{\frac{AD \cdot AF}{2} \sin \hat{A}}{\frac{AB \cdot AC}{2} \sin \hat{A}} = 1 - \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} - \frac{BD}{AB} \cdot \frac{BE}{BC} - \frac{CE}{BC} \cdot \frac{CF}{AC}$$

.... 1p

Dar

(5) $$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}, \frac{AF}{AC} = \frac{4}{5}, \frac{BD}{AB} = \frac{2}{3}, \frac{BE}{BC} = \frac{1}{4}, \frac{CE}{BC} = \frac{3}{4}, \frac{CF}{AC} = \frac{1}{5}$$

.... 1p

Din relaţia (4) utilizând relaţiile (5) obţinem:

$\dfrac{\mathcal{A}_{DEF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{5} = 1 - \dfrac{4}{15} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{25}{60} = \dfrac{5}{12}$ 1p

Cum $\dfrac{5}{12} > \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 25 > 24$ şi utilizând relaţia (3) rezultă că

$\dfrac{\mathcal{V}_{DEF}}{\mathcal{V}_{ABC}} > \dfrac{2}{5}$ 1p

TOTAL **7p**