Anul matematicii în şcoala românească

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR"

Ediţia a XI-a, 20-22 martie 2010

SIBIU

Clasa a XI-a

1. Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$ să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{(n+1)^6}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}<\frac{\pi^4}{90},\ n\geq 1.$$

Emil C. Popa, Sibiu

2. Să se determine funcţiile continue $g:[a,b]\to(0,\infty), a,b\in\mathbb{R}, a<b$ cu proprietatea că există o funcţie continuă $f:[a,b]\to[a,b]$ astfel încât $f(x)<x, \forall x\in(a,b)$ şi $g(f(x))=g^2(x), \forall x\in[a,b]$.

Liana Agnola, CNGL Sibiu
Daniela Burtoiu, CNAO Piteşti

3.Pentru o matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dată se consideră funcţia

$$f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X)=AX+XA$$

.

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) funcţia f este bijectivă;
b) $\mathrm{tr}(A)\neq 0$ şi $\det(A)\neq 0$;
c) este adevărată implicaţia $f(X)=O_2\Rightarrow X=O_2$.

Dumitru Barac, Sibiu

4. Se cosideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1=5$ şi care verifică relaţia $2n(a_{n+1}-a_n)+3a_{n+1}-5a_n=8n^2+32n+30, n\geq 2$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$.

26223: G.M.11/2009

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA XI-a
BAREM DE CORECTARE

1. Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$ să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{(n+1)^6}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}<\frac{\pi^4}{90},\ n\geq 1.$$

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie Notăm $x_n=\frac{1}{(n+1)^6}-\frac{\pi^4}{90}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}$ 2p

şi avem $x_n\to 0$. 1p

Observăm că $x_{n+1}-x_n=\frac{(n+1)^6+(n+2)^6(n^2+2n)}{(n+2)^6(n+1)^6}>0$ pentru $n\geq 1$. 2p

Rezultă că $x_{n+1}>x_n$ şi deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător 1p

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, rezultă $x_n<0$ pentru $n\geq 1$, de unde rezultă inegalitatea din enunţ 1p

TOTAL **7p**

2. Să se determine funcţiile continue $g : [a,b] \to (0,\infty), a,b \in \mathbb{R}, a < b$ cu proprietatea că există o funcţie continuă $f : [a,b] \to [a,b]$ astfel încât $f(x) < x, \forall x \in (a,b)$ şi $g(f(x)) = g^2(x), \forall x \in [a,b]$.

Liana Agnola, CNGL Sibiu
Daniela Burtoiu, CNAO Piteşti

Soluţie $f(a) \geq a$ şi $f(a) = \lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a, x>a} x = a \Rightarrow f(a) = a, f(b) \leq b$ 1p
$g(f(a)) = g^2(a) = g(a) \Rightarrow g(a) = 1$
Fie şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dat de relaţia de recurenţă $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n), \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_0 \in (a,b)$ 1p
$\alpha_n \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_{n+1} - \alpha_n = f(\alpha_n) - \alpha_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e convergent 1p
Fie $l = \lim\limits_n \alpha_n \in [a,b]$. Trecem la limită în relaţia de recurenţă şi obţinem $f(l) = l \Rightarrow l = a$ . . 1p
Folosim relaţia $g(f(x)) = g^2(x), \forall x \in [a,b]$. Obţinem
$g(\alpha_1) = g^2(\alpha_0)$,
$g(\alpha_2) = g^2(\alpha_1) = g^{2^2}(\alpha_0)$ şi prin inducţie $g(\alpha_n) = g^{2^n}(\alpha_0), \forall n \in \mathbb{N}$ 1p
Rezultă că $g(\alpha_0) = [g(\alpha_n)]^{\frac{1}{2^n}}$ şi $\lim\limits_n g(\alpha_0) = \lim\limits_n [g(\alpha_n)]^{\frac{1}{2^n}} = [g(\lim\limits_n \alpha_n)]^{\lim\limits_n \frac{1}{2^n}} = [g(a)]^0 = 1^0 = 1$.
Rezultă că $g(\alpha_0) = 1, \forall \alpha_0 \in (a,b)$ 1p
Rezultă că $g(b) = 1$. Atunci $g(x) = 1, \forall x \in [a,b]$ 1p
TOTAL **7p**

3. Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dată se consideră funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX + XA$.

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) funcţia f este bijectivă;

b) $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ şi $\det(A) \neq 0$;

c) este adevărată implicaţia $f(X) = O_2 \Rightarrow X = O_2$.

Dumitru Barac, Sibiu

Soluţie Arătăm întâi că afirmaţiile a) şi b) sunt echivalente. Funcţia f este bijectivă dacă şi numai dacă ecuaţia $f(X) = B$ are soluţie unică pentru orice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. 1p

Notând $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, avem

$f(X) = AX + XA = \begin{pmatrix} 2ax + cy + bz & bx + (a+d)y + bt \\ cx + (a+d)z + ct & cy + bz + 2dt \end{pmatrix}$. 1p

Egalând cu matricea B, se obţine un sistem de 4 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute x, y, z, t care are soluţie unică dacă şi numai dacă matricea sistemului are determinantul nenul. Scăzând coloana a patra din prima, linia a patra din prima, adunând linia întâi la a patra şi dezvoltând după elementele primei linii a determinantului obţinut, avem

$$\begin{vmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & c & b & 0 \\ 0 & a+d & 0 & b \\ 0 & 0 & a+d & c \\ -2d & c & b & 2d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+d) & 0 & 0 & -2d \\ 0 & a+d & 0 & b \\ 0 & 0 & a+d & c \\ -2d & c & b & 2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+d) & 0 & 0 & -2d \\ 0 & a+d & 0 & b \\ 0 & 0 & a+d & c \\ 2a & c & b & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4bc(a+d)^2 + 4ad(a+d)^2 = 4(ad - bc)(a+d)^2,$$

de unde avem concluzia cerută. 3p

Arătăm acum că afirmaţiile c) şi b) sunt echivalente. Deoarece $f(O_2) = O_2$, afirmaţia b) înseamnă că ecuaţia $f(X) = O_2$ are numai soluţia nulă, adică, folosind notaţiile anterioare, se obţine un sistem de 4 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute x, y, z, t omogen care are numai soluţia nulă dacă şi numai dacă matricea sistemului are determinantul nenul. Folosind calculele anterioare, obţinem concluzia cerută. 2p

TOTAL **7p**

4. Se cosideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 5$ şi care verifică relaţia $2n(a_{n+1} - a_n) + 3a_{n+1} - 5a_n = 8n^2 + 32n + 30, n \geq 2$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^2}$.

26223: G.M.11/2009

Soluţie $n = 1 \Rightarrow a_2 = 21$ 0,5p
$n = 2 \Rightarrow a_3 = 45$ 0,5p
$n = 3 \Rightarrow a_4 = 77$ 0,5p
Căutăm a_n de forma $a_n = An^2 + Bn + C$ 0,5p
Din $n = 1, 2, 3$ rezultă sistemul luniar

$$\begin{cases} A + B + C &= 5 \\ 4A + 2B + C &= 21 \\ 9A + 3B + C &= 45 \end{cases}$$

.... 0,5p
De unde $A = B = 4$ şi $C = -3$ 1,5p
Aşadar, avem $a_n = 4n^2 + 4n - 3 = 4n(n + 1) - 3, n = 1, 2, 3...$ care verifică condiţia din enunţ.
Demonstraţia se face prin inducţie matematică
$a_{n+1} = \dfrac{8n^3 + 36n^2 + 46n + 15}{2n + 3} = 4n^2 + 12n + 5 = 4(n + 1)(n + 2) - 3, n = 1, 2, ...$ 2p
Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^2} = 4$ 1p