Anul matematicii în şcoala românească

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE LAZĂR"
Ediţia a XI-a, 20-22 martie 2010
SIBIU

Clasa a IX-a

1. Fie a, b, numere reale nenule arbitrare. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f\Big(ax + bf(y)\Big) = \frac{a^2}{4b}(x+y) + f\Big(bf(x)\Big), \quad (\forall)x, y \in \mathbb{R}.$$

Dumitru Acu, Sibiu

2. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele $M \in (CD)$ şi $N \in (AB)$ variabile astfel încât $MN \parallel AD$. Să se arate că dreapta GN trece printr-un punct fix, unde G este centrul de greutate al triunghiului AMB.

Dumitru Barac, Sibiu

3. Să se arate că oricum am alege 15 numere din mulţimea $\{2, 3, \ldots, 2010\}$, cu proprietatea că oricare două dintre ele sunt relativ prime, cel puţin unul dintre ele este număr prim.

Să se dea un exemplu în care exact un număr este prim.

GM 10/2009, C.O:5066

4. Să se arate că în orice poligon convex $A_1A_2\ldots A_n$ cu n laturi există indicii $1 \leq i \neq j \leq n$ astfel încât

$$\left|\cos\widehat{A_i} - \cos\widehat{A_j}\right| < \frac{2}{n-1}.$$

Să se dea un exemplu de patrulater convex $A_1A_2A_3A_4$ în care

$$\left|\cos\widehat{A_i} - \cos\widehat{A_j}\right| \geq \frac{1}{3} \quad \text{pentru orice } 1 \leq i \neq j \leq 4.$$

Emil C. Popa şi Dumitru Barac, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA IX-a
BAREM DE CORECTARE

1. Fie a, b, numere reale nenule arbitrare. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f\Big(ax + bf(y)\Big) = \frac{a^2}{4b}(x+y) + f\Big(bf(x)\Big), \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie Particularizăm $x = 0$ şi din relaţia dată obţinem

(1) $f\Big(bf(y)\Big) = \dfrac{a^2 y}{4b} + f\Big(bf(0)\Big), \quad (\forall) y \in \mathbb{R}$ **2p**

Particularizăm $y = 0$ şi din relaţia dată obţinem

$f\Big(ax + bf(0)\Big) = \dfrac{a^2 x}{4b} + f\Big(bf(x)\Big), \quad (\forall) x \in \mathbb{R},$ **1p**

de unde, utilizând (1) în membrul drept, găsim

(2) $f\Big(ax + bf(0)\Big) = \dfrac{a^2 x}{2b} + f\Big(bf(0)\Big), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$ **1p**

În (2) înlocuim x cu $\dfrac{x - bf(0)}{a}$ şi obţinem

$f(x) = \dfrac{ax}{2b} - \dfrac{af(0)}{2} + f\Big(bf(0)\Big),$ **1p**

adică există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât (3) $f(x) = \dfrac{ax}{2b} + c, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$ **1p**

Deoarece toate funcţiile (3) verifică ecuaţia funcţională din enunţ

$$\frac{a}{2b}[ax + bf(y)] + c = \frac{a^2}{4b}(x+y) + \frac{a}{2b} \cdot bf(x) + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 x}{2b} + \frac{a}{2}\left(\frac{ay}{2b} + c\right) = \frac{a^2 x}{4b} + \frac{a^2 y}{4b} + \frac{a}{2}\left(\frac{ax}{2b} + c\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2 x}{2b} + \dfrac{a^2 y}{4b} + \dfrac{ac}{2} = \dfrac{a^2 x}{4b} + \dfrac{a^2 y}{4b} + \dfrac{a^2 x}{4b} + \dfrac{ac}{2}$ **1p**

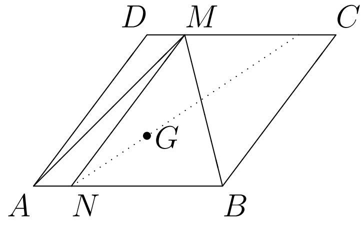
mulţimea soluţiilor sale este dată de (3), unde $c \in \mathbf{R}$.

Total **7p**

2. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele $M \in (CD)$ şi $N \in (AB)$ variabile astfel încât $MN \parallel AD$. Să se arate că dreapta GN trece printr-un punct fix, unde G este centrul de greutate al triunghiului AMB.

Dumitru Barac, Sibiu

Soluţie Figura **1p**



Fie $k \in (0,1)$ arbitrar, $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AB}$ şi P un punct arbitrar pe dreapta GN, deci $\overrightarrow{AP} = (1-p)\overrightarrow{AN} + p\overrightarrow{AG}$, $p \in \mathbb{R}$ **1p**

Avem: $\overrightarrow{AP} = (1-p)k\overrightarrow{AB} + p \cdot \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}) =$

$= (1-p)k\overrightarrow{AB} + \dfrac{p}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AN}) =$

$= (1-p)k\overrightarrow{AB} + \dfrac{p}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{p}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{kp}{3}\overrightarrow{AB} = \left(k - pk + \dfrac{p}{3} + \dfrac{kp}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \dfrac{p}{3}\overrightarrow{AD} =$

$= \dfrac{3k + p - 2kp}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{p}{3}\overrightarrow{AD} = \dfrac{k(3-2p)}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{p}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) =$

$= \dfrac{k(3-2p)}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{p}{3}\overrightarrow{AC}$ **3p**

Obţinem punct fix pe NG dacă alegem p astfel încât să anulăm coeficientul variabilei k **1p**

Pentru $p = \dfrac{3}{2}$ obţinem $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$, unde O este centrul paralelogramului, punctul fix cerut **1p**

Total **7p**

3. Să se arate că oricum am alege 15 numere din mulţimea $\{2, 3, \ldots, 2010\}$, cu proprietatea că oricare două dintre ele sunt relativ prime, cel puţin unul dintre ele este număr prim.

Să se dea un exemplu în care exact un număr este prim.

GM 10/2009, C.O:5066

Soluţie Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_{15}\}$ o submulţime
de 15 numere a mulţimii $\{2, 3, \ldots, 2010\}$,
oricare două relativ prime între ele **1p**
Presupunem, prin reducere la absurd,
că toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ sunt compuse **1p**
Fiecare dintre ele are un factor prim $\leq \left[\sqrt{2010}\right] = 44$, deci există numerele
prime $p_1, p_2, \ldots, p_{15} \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\} \stackrel{\text{not}}{=} P$,
astfel încât $p_i | a_i$, $i = \overline{1, 15}$ **2p**
Deoarece mulţimea P are doar 14 elemente, folosind principiul cutiei,
rezultă că există $1 \leq i < j \leq 15$ astfel încât $p_i = p_j \stackrel{\text{not}}{=} p$.
Rezultă că $p | a_i$ şi $p | a_j$, deci numerele a_i şi a_j nu sunt prime între ele,
ceea ce este absurd **2p**

Un exemplu cu un singur număr prim este următorul:
$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2, 47$ **1p**
Total **7p**

4. Să se arate că în orice poligon convex $A_1A_2\dots A_n$ cu n laturi există indicii $1 \le i \ne j \le n$ astfel încât

$$\left|\cos\widehat{A_i} - \cos\widehat{A_j}\right| < \frac{2}{n-1}.$$

Să se dea un exemplu de patrulater convex $A_1A_2A_3A_4$ în care

$$\left|\cos\widehat{A_i} - \cos\widehat{A_j}\right| \ge \frac{1}{3} \quad \text{pentru orice } 1 \le i \ne j \le 4.$$

Emil C. Popa şi Dumitru Barac, Sibiu

Soluţie Presupunem, prin reducere la absurd, că

$\left|\cos\widehat{A_i} - \cos\widehat{A_j}\right| \ge \dfrac{2}{n-1}$ pentru orice $1 \le i \ne j \le n$ **1p**

Fie $0 < \widehat{B_1} \le \widehat{B_2} \le \dots \le \widehat{B_n} < \pi$ unghiurile poligonului ordonate crescător,
deci $1 > \cos\widehat{B_1} \ge \cos\widehat{B_2} \ge \dots \cos\widehat{B_n} > -1$ **1p**

Deoarece $\cos\widehat{B_1} - \cos\widehat{B_2} \ge \dfrac{2}{n-1}$, $\cos\widehat{B_2} - \cos\widehat{B_3} \ge \dfrac{2}{n-1}$, ...,

..., $\cos\widehat{B_{n-1}} - \cos\widehat{B_n} \ge \dfrac{2}{n-1}$, adunând membru cu membru obţinem

$2 > \cos\widehat{B_1} - \cos\widehat{B_n} \ge (n-1)\cdot\dfrac{2}{n-1} = 2$, contradicţie **2p**

Luăm $A_1A_2A_3A_4$ un trapez cu $\widehat{A_1} = \dfrac{\pi}{6}$, $\widehat{A_2} = \dfrac{\pi}{3}$, $\widehat{A_3} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\widehat{A_1} = \dfrac{5\pi}{6}$ **1p**

Este evident convex şi $\left|\cos\widehat{A_1} - \cos\widehat{A_2}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$ etc. verifică cerinţele **2p**

Total **7p**