Anul matematicii în şcoala românească

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”

Ediţia a XI-a, 20-22 martie 2010

SIBIU

CLASA X-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $\log_{1,5}(1+\sin^2 x)\cdot\log_{1,5}(1+\cos^2 x)=1$.

b) $\log_{0,5}^2(1+tg^2x)+\log_{0.5}^2(1+ctg^2x)=2$.

26235, G.M. 12/2009

2. Dacă $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ cu $|z_1 z_2\cdot ...\cdot z_n|=1$, iar $a_1, a_2, ..., a_n \in [1,\infty)$, atunci

$$\frac{1}{|a_1+z_1+z_1z_2+z_1z_2z_3|}+\frac{1}{|a_2+z_2+z_2z_3+z_2z_3z_4|}+...+\frac{1}{|a_n+z_n+z_nz_1+z_nz_1z_2|}>\frac{1}{\max(a_1,a_2,...,a_n)}$$

unde $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 4$.

Emil C. Popa, Sibiu

3. Fie $\alpha_k\in\mathbb{R}, k=\overline{1,n}$ şi $z_k\in\mathbb{C}^*, k=\overline{1,n}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=...=|z_n|=r>0$.

a) Să se arate că numărul $u=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k z_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{z_k}\right)$ este real.

b) Arătaţi că dacă $\alpha_k>0, k=\overline{1,n}$ atunci $u\in\left[0,\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\right]$.

Dumitru Acu, Sibiu

4. Să se rezolve ecuaţia: $2^{\sqrt[15]{x}}+2^{\sqrt[3]{x}}=2\cdot 2^{\sqrt[5]{x}}$.

Marius Cătălin Dăbuleanu, Corabia

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

CLASA X-a
BAREM DE CORECTARE

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:
a) $\log_{1,5}(1+\sin^2 x)\cdot\log_{1,5}(1+\cos^2 x)=1$
b) $\log^2_{0,5}(1+tg^2x)+\log^2_{0.5}(1+ctg^2x)=2$

26235, G.M. 12/2009

Soluţie a) Observăm imediat că $\log_{1,5}(1+\sin^2 x)>0, \log_{1,5}(1+\cos^2 x)>0$ 0,5p
Din inegalitatea mediilor:
$1=\sqrt{\log_{1,5}(1+\sin^2 x)\cdot\log_{1,5}(1+\cos^2 x)}\le\dfrac{\log_{1,5}(1+\sin^2 x)+\log_{1,5}(1+\cos^2 x)}{2}=$
$=\dfrac{\log_{1,5}((1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x))}{2}$, de unde $2\le\log_{1,5}(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)$ 1,5p
de unde rezultă că $\dfrac{9}{4}\le 1+\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x\cos^2 x$, respectiv $\sin^2 x(1-\sin^2 x)-\dfrac{1}{4}\ge 0$,
adică $\left(\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\right)^2\le 0$, ceea ce implică $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}=\cos^2 x$ 1p
Ecuaţia este verificată şi deci mulţimea soluţiilor este: $S=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ 0,5p
b) Ecuaţia devine $\log^2_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\cos^2 x}+\log^2_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sin^2 x}=2$ 0,5p
şi este echivalentă cu $\log^2_{\frac{1}{2}}\cos^2 x+\log^2_{\frac{1}{2}}\sin^2 x=2$ 0,5p
Aplică inegalitatea cunoscută $\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 1p
şi atunci $1=\sqrt{\dfrac{\log^2_{\frac{1}{2}}\cos^2 x+\log^2_{\frac{1}{2}}\sin^2 x}{2}}\ge\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(\cos^2 x\sin^2 x)}{2}$ 0,5p
ceea ce este echivalent cu $2\ge\log_{\frac{1}{2}}(\cos^2 x\sin^2 x)\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\le\sin^2 x(1-\sin^2 x)\Leftrightarrow\left(\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\right)^2\le 0$
$\Leftrightarrow\sin^2 x=\dfrac{1}{2}=\cos^2 x$ 0,5p
Deci $x\in S=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ 0,5p

TOTAL **7p**

2. Dacă $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ cu $|z_1 z_2 \cdot ... \cdot z_n| = 1$, iar $a_1, a_2, ..., a_n \in [1, \infty)$, atunci

$$\frac{1}{|a_1 + z_1 + z_1z_2 + z_1z_2z_3|} + \frac{1}{|a_2 + z_2 + z_2z_3 + z_2z_3z_4|} + ... + \frac{1}{|a_n + z_n + z_nz_1 + z_nz_1z_2|} > \frac{1}{\max(a_1, a_2, ..., a_n)}$$

unde $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie Observăm că
$|a_i + z_i + z_iz_{i+1} + z_iz_{i+1}z_{i+2}| \leq a_i + |z_i| + |z_iz_{i+1}| + |z_iz_{i+1}z_{i+2}|$ 1p
şi este suficient să demonstrăm că

$$\frac{1}{a_1 + |z_1| + |z_1z_2| + |z_1z_2z_3|} + \frac{1}{a_2 + |z_2| + |z_2z_3| + |z_2z_3z_4|} + ...$$

$$... + \frac{1}{a_n + |z_n| + |z_nz_1| + |z_nz_1z_2|} > \frac{1}{\max(a_1, a_2, ..., a_n)}.$$

....1p
Notăm $|z_1| = \frac{A_2}{A_1}, |z_2| = \frac{A_3}{A_2}, ..., |z_n| = \frac{A_1}{A_n}$ cu $A_i > 0$ 2p
şi obţinem:

$$\frac{A_1}{a_1A_1 + A_2 + A_3 + A_4} + \frac{A_2}{a_2A_2 + A_3 + A_4 + A_5} + ... + \frac{A_n}{a_nA_n + A_1 + A_2 + A_3} >$$

$$\frac{A_1}{a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_nA_n} + \frac{A_2}{a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_nA_n} + ... + \frac{A_n}{a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_nA_n}$$

$$\geq \frac{1}{\max(a_1, a_2, ..., a_n)}$$

....2p
TOTAL **7p**

3. Fie $\alpha_k \in \mathbb{R}, k=\overline{1,n}$ şi $z_k \in \mathbb{C}^*, k=\overline{1,n}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = r > 0$.

a) Să se arate că numărul $u = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k z_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{z_k}\right)$ este real.

b) Arătaţi că dacă $\alpha_k > 0, k=\overline{1,n}$ atunci $u \in \left[0, \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2\right]$.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie a) Din $|z_k| = r$ rezultă $z_k \cdot \overline{z_k} = r^2$,
$k = \overline{1,n}$ 1p

Acum putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{z_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\overline{z_k}}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{r^2}{z_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k z_k}{r^2}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{z_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k\right) = u
\end{aligned}$$

de unde rezultă $u \in \mathbb{R}$ 2p

b) Din $|z_k| = r, k=\overline{1,n}$ rezultă că $z_k = r(\cos t_k + i \sin t_k), t_k \in [0, 2\pi), k = \overline{1,n}$ 1p

Avem

$$\begin{aligned}
u &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos t_k + i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin t_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos t_k - i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin t_k\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos t_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin t_k\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} {\alpha_k}^2 + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} \alpha_j \alpha_k \cos(t_j - t_k) \ \ldots\ldots\ldots\ 1p \\
&\le \sum_{k=1}^{n} {\alpha_k}^2 + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} \alpha_j \alpha_k \ \ldots\ldots\ldots\ 1p \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2
\end{aligned}$$

Aşadar avem $0 \le u \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2$ 1p

TOTAL **7p**

4. Să se rezolve ecuaţia: $2^{\sqrt[15]{x}} + 2^{\sqrt[3]{x}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[5]{x}}$.

Marius Cătălin Dăbuleanu, Corabia

Soluţie Folosim inegalitatea mediilor $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ cu egalitate dacă $a = b$.
Astfel avem $\dfrac{2^{\sqrt[15]{x}} + 2^{\sqrt[3]{x}}}{2} \geq \sqrt{2^{\sqrt[15]{x}} \cdot 2^{\sqrt[3]{x}}}$ 2p
Dar $\sqrt{2^{\sqrt[15]{x}} \cdot 2^{\sqrt[3]{x}}} = \sqrt{2^{\sqrt[15]{x} + \sqrt[3]{x}}} = 2^{\frac{\sqrt[15]{x} + \sqrt[3]{x}}{2}} \geq 2^{\sqrt{\sqrt[15]{x} \cdot \sqrt[3]{x}}} = 2^{\sqrt[5]{x}}$ 2p
Rezultă că $2^{\sqrt[15]{x}} + 2^{\sqrt[3]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[5]{x}}$ 1p
cu egalitate pentru $2^{\sqrt[15]{x}} = 2^{\sqrt[3]{x}}$ 1p
Din $\sqrt[15]{x} = \sqrt[3]{x}$ rezultă că $x = x^5$, adică $x(1 - x^4) = 0$ şi de aici
$S = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1\}$ 1p
TOTAL **7p**