Anul matematicii în şcoala românească

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE LAZĂR"
Ediţia a XI-a, 20-22 martie 2010
SIBIU

Clasa a VII-a

1. Să se determine numărul soluţiilor inecuaţiei $v+w+x+y+z \leq 17$, unde $v,w,x,y,z \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dumitru Barac, Sibiu

2. (i) Arătaţi că, pentru orice număr real a, avem egalitatea

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a.$$

(ii) Dacă m,n,p sunt numere întregi impare şi a,b sunt numere întregi oarecare, atunci numărul

$$E = ma^2 + nab + pb^2$$

se poate reprezenta ca diferenţă a două pătrate de numere întregi.

Dumitru Acu, Sibiu

3. Fie ABC un triunghi în care $AB = 4cm$ şi $AC = 12cm$. Arătaţi că lungimea bisectoarei AA' $(A' \in BC)$ a unghiului BAC este mai mică decât 6.

E:13945, G.M. 1/2010

4. Pe segmentul AB se consideră punctul C iar pe segmentul CB punctul D astfel ca $AC = 2\,\text{cm}$. De aceeaşi parte a lui AB se construiesc triunghiurile echilaterale ACM şi DBN şi se notează cu P şi Q mijloacele segmentelor CM, respectiv BN. Să se determine CD astfel ca aria triunghiului APQ să fie egală cu $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Emil C. Popa, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA VII-a
BAREM DE CORECTARE

1. Să se determine numărul soluţiilor inecuaţiei $v + w + x + y + z \leq 17$, unde $v, w, x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dumitru Barac, Sibiu

Soluţie Notăm A mulţimea soluţiilor lui
$v + w + x + y + z \leq 17$, $v, w, x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi B mulţimea
soluţiilor lui $a + b + c + d + e \geq 18$, $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **1p**
Observăm că, dacă $(v, w, x, y, z) \in A$, atunci avem:

$$(7 - v) + (7 - w) + (7 - x) + (7 - y) + (7 - z) =$$
$$= 35 - (v + w + x + y + z) \geq 35 - 17 = 18,$$

deci $(7 - v, 7 - w, 7 - x, 7 - y, 7 - z) \in B$ **2p**
În mod analog, dacă $(a, b, c, d, e) \in B$, atunci
$(7 - a, 7 - b, 7 - c, 7 - d, 7 - e) \in A$ **1p**
Rezultă că mulţimile A şi B au acelaşi număr de elemente
şi niciun element comun **1p**
Reuniunea $A \cup B$ este mulţimea tuturor cvintuplelor (a, b, c, d, e)
cu $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, deci numărul elementelor lui $A \cup B$ este 6^5 . . . . **1p**
Numărul elementelor mulţimii A este $\dfrac{6^5}{2} = 3 \cdot 1296 = 3888$ **1p**
Total **7p**

2. Arătaţi că, pentru orice număr real a, avem egalitatea

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a.$$

(ii) Dacă m, n, p sunt numere întregi impare şi a, b sunt numere întregi oarecare, atunci numărul

$$E = ma^2 + nab + pb^2$$

se poate reprezenta ca diferenţă a două pătrate de numere întregi.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie (i) Calcul direct 1p

(ii) Dacă a şi b sunt pare, atunci $4|E$ şi avem

$E = \left(\frac{E}{4}+1\right)^2 - \left(\frac{E}{4}-1\right)^2$ 3p

În celelalte situaţii avem $2|(E \pm 1)$ şi putem scrie

$E = \left(\frac{E+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{E-1}{2}\right)^2$ 3p

Total **7p**

3. Fie ABC un triunghi în care $AB = 4cm$ şi $AC = 12cm$. Arătaţi că lungimea bisectoarei AA' ($A' \in BC$) a unghiului BAC este mai mică decât 6.

E:13945, G.M. 1/2010

Soluţie Ducem $BE || AA'$, $A \in CE$ 1p

$\triangle ABE$ isoscel, $AB = AE = 4cm$ 2p

$\triangle CAA' \sim \triangle CEB$, $\dfrac{AA'}{BE} = \dfrac{CA}{CE} = \dfrac{12}{16}$ 2p

$AA' = \dfrac{3}{4}BE < \dfrac{3}{4}(AB + AE) = \dfrac{3}{4} \cdot 8 = 6$ 2p

Total **7p**

4. Pe segmentul AB se consideră punctul C iar pe segmentul CB punctul D astfel ca $AC = 2\,\text{cm}$. De aceeaşi parte a lui AB se construiesc triunghiurile echilaterale ACM şi DBN şi se notează cu P şi Q mijloacele segmentelor CM, respectiv BN. Să se determine CD astfel ca aria triunghiului APQ să fie egală cu $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie Desen corect 1p

Fie $PR \perp AB$, deci $PR = \dfrac{\sqrt{3}}{2}cm$ 1p

$\mathcal{S}_{APQ} = \mathcal{S}_{APD}$ (considerând baza comună AP) 3p

$\mathcal{S}_{APQ} = \mathcal{S}_{APD} = \dfrac{(2 + CD)\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow CD = 2\,\text{cm}$. 2p

Total **7p**