Anul matematicii în şcoala românească

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE LAZĂR"
Ediţia a XI-a, 20-22 martie 2010
SIBIU

CLASA XII-a

1. Dacă polinomul monic $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ are toate rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$ în intervalul $[-1, 1]$, iar coeficienţii săi satisfac proprietatea $a_{n-i} = a_i, i = \overline{0, n}$.
Să se demonstreze că $f = (x+1)^p (x-1)^{2q}$ cu $p, q \in \mathbb{N}, p + 2q = n$.

Marcel Ţena, Bucureşti GM 11/2009

2. Pe mulţimea M este definită o lege de compoziţie $*$ asociativă, cu elementul neutru e, cu elementul absorbant a (adică $x * a = a * x = a, \forall x \in M$) şi orice $x \neq a$ simetrizabil.
a) Să se arate că dacă M are cel puţin două elemente , atunci $M \setminus \{a\}$ este partea stabilă a lui M.
b) Fie $m \in M$. Să se arate că dacă M are cel puţin patru elemente, atunci $M \setminus \{m\}$ este parte stabilă a lui M dacă şi numai dacă $m = a$.
c) Să se arate că dacă M are două sau trei elemente, atunci există $m_1, m_2 \in M, m_1 \neq m_2$ astfel încât $M \setminus \{m_1\}$ şi $M \setminus \{m_2\}$ sunt părţi stabile ala lui M.

Dumitru Barac, Sibiu

3. Dacă $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, iar $f(0) + f(\pi) = 0$, atunci

$$\int_0^\pi f'^2(x)dx \geq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi f(x) \sin x dx \right| \cdot \left| \int_0^\pi f(x) \cos x dx \right|$$

Emil C. Popa, Sibiu

4. a) Arătaţi că

$$\int_0^1 (1-t^2)^m dt = 4^m \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}, \forall m \in \mathbb{N}$$

b) Calculaţi limita şirului $(x_n)_{n \geq 0}$, dacă

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

Ioan Ţincu, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA XII-a
BAREM DE CORECTARE

1. Dacă polinomul monic $f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ are toate rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$ în intervalul $[-1,1]$, iar coeficienţii săi satisfac proprietatea $a_{n-i}=a_i, i=\overline{0,n}$. Să se demonstreze că
$f=(x+1)^p(x-1)^{2q}$ cu $p,q\in\mathbb{N}, p+2q=n$.

Marcel Ţena, Bucureşti, GM 11/2009

Soluţie Observăm că $a_n=a_0=1$, deci $f(0)=1\neq 0$, cu alte cuvinte $x_k\neq 0, k=\overline{1,n}$ 1p
Avem $f\left(\frac{1}{x_k}\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{x_k^i}=\frac{1}{x_k^n}\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^{n-i}=\frac{1}{x_k^n}\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x_k^{n-i}=\frac{1}{x_k^n}f(x_k)=0$ 2p
Deci $\frac{1}{x_k}\in[-1,1], k=\overline{1,n}$ 1p
Cum $x_k\in[-1,1]$, deducem că $x_k\in\{-1,1\}, k=\overline{1,n}$. Deci $f=(x+1)^p(x-1)^{n-p}$, unde p este ordinul de mutiplicitate al rădăcinii -1 .... 2p
Condiţia $f(0)=1$ implică $1=(-1)^{n-p}$, deci $n-p=2q, q\in\mathbb{N}$ 1p
TOTAL **7p**

2 Pe mulţimea M este definită o lege de compoziţie $*$ asociativă, cu elementul neutru e, cu elementul absorbant a (adică $x * a = a * x = a, \forall x \in M$) şi orice $x \neq a$ simetrizabil.
a) Să se arate că dacă M are cel puţin două elemente , atunci $M \setminus \{a\}$ este partea stabilă a lui M.
b) Fie $m \in M$. Să se arate că dacă M are cel puţin patru elemente, atunci $M \setminus \{m\}$ este parte stabilă a lui M dacă şi numai dacă $m = a$.
c) Să se arate că dacă M are două sau trei elemente, atunci există $m_1, m_2 \in M, m_1 \neq m_2$ astfel încât $M \setminus \{m_1\}$ şi $M \setminus \{m_2\}$ sunt părţi stabile ala lui M.

Dumitru Barac, Sibiu.

Soluţie Fie $x, y \in M, x \neq a, y \neq b$. Presupunând prin reducere la absurd $x * y = a$ rezultă $x * y = x * a$ 0,5p
Compunând la stânga cu simetricul x' al lui x, rezultă $x' * (x * y) = x' * (x * a)$ 0,5p
Folosind asociativitatea, rezultă $(x' * x) * y = (x' * x) * a$, adică $e * y = e * a$, adică $y = a$, ceea ce este absurd 0,5p
Rezultă că $x * y \neq a$, adică $x * y \in M \setminus \{a\}$, ceea ce trebuia arătat 0,5p
b) Suficienţa este demonstrată la punctul a). Demonstrăm necesitatea. Presupunem, prin reducere la absurd, că $m \neq a$. Rezultă xă există m' simetricul lui m 0,5p
Deoarece $M \setminus \{m\}$ are cel puţin trei elemente, putem alege un element $x \in M, x \neq a, x \neq e$ şi $x \neq m$ 0,5p
Considerăm elementul $y = x' * m$, unde x' este simetricul lui x. Dacă am admite că $y = m$, ar rezulta că $x' * m = m$, adică $x * (x' * m) = x * m$, deci $(x * x') * m = x * m$, deci $e * m = x * m$ deci $m * m' = x * (m * m')$, deci $e = x$, ceea ce este fals 1p
Rezultă că $x, y \in M \setminus \{m\}$, deci $x * y \neq m$ 0,5p
Însă avem: $x * y = x * (x' * m) = (x * x') * m = e * m = m$, contradicţie. Înseamnă că presupunerea $m \neq a$ este falsă, deci $m = a$ 0,5p
c) Din ipoteză $(M \setminus \{a\}, \cdot)$ este grup cu un element $\{e\}$, respectiv două elemente $\{e, x\}$. Primul grup este grupul banal cu un element, iar al doilea este grupul ciclic de ordin doi 0,5p

Rezultă că tabelele operaţiilor în M sunt:

*	a	e
a	a	a
e	a	e

respectiv

*	a	e	x
a	a	a	a
e	a	e	x
x	a	x	e

.... 0,5p

Din primul tabel se constată direct că $M \setminus \{a\}$ şi $M \setminus \{e\}$ sunt părţi stabile ale lui M, deci putem lua $m_1 = a, m_2 = e$ 0.5p
Din al doilea tabel se constată că $M \setminus \{a\}$ şi $M \setminus \{x\}$ sunt părţi stabile ale lui M, deci putem lua $m_1 = a, m_2 = x$ 0.5p
TOTAL **7p**

3. Dacă $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, iar $f(0)+f(\pi)=0$, atunci

$$\int_0^\pi f'^2(x)dx \geq \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi f(x)\sin x dx\right|\cdot\left|\int_0^\pi f(x)\cos x dx\right|$$

Emil C. Popa, Sibiu.

Soluţie Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$\int_0^\pi f'(x)\cos x dx = \int_0^\pi f(x)\sin x dx,$ 1p

$\int_0^\pi f'(x)\sin x dx = -\int_0^\pi f(x)\cos x dx,$ 1p

Pe de altă parte conform inegalităţii C-S-B rezultă:

$\left[\int_0^\pi f'(x)\cos x dx\right]^2 \leq \int_0^\pi [f'(x)]^2 dx\cdot\int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx$ 1,5p

$\left[\int_0^\pi f'(x)\sin x dx\right]^2 \leq \int_0^\pi [f'(x)]^2 dx\cdot\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx$ 1,5p

Avem în final

$\left[\int_0^\pi f'(x)\cos x dx\right]^2\cdot\left[\int_0^\pi f'(x)\sin x dx\right]^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\left[\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx\right]^2$ 1p

Şi de aici inegalitatea din enunţ

$\int_0^\pi f'^2(x)dx \geq \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi f(x)\sin x dx\right|\cdot\left|\int_0^\pi f(x)\cos x dx\right|$ 1p

TOTAL **7p**

4. a) Arătaţi că

$$\int_0^1 (1-t^2)^m dt = 4^m \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}, \forall m \in \mathbb{N}$$

b) Calculaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, dacă

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

Ioan Ţincu, Sibiu

Soluţie Folosim metoda inducţiei matematice.
Pentru m=0 este evident. Presupunem că pentru m=k avem

$$I_k = \int_0^1 (1-t^2)^k dt = 4^k \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$$

şi demonstrăm egalitatea pentru $m = k+1$, adică
$I_{k+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{k+1} dt = 4^{k+1}\frac{[(k+1)!]^2}{(2k+3)!}$ 0,5p
Putem scrie $I_{k+1} = I_k + \int_0^1 \frac{\left[(1-t^2)^{k+1}\right]'}{k+1} \cdot \frac{t}{2} dt$ 0,5p
$I_{k+1} = \frac{2(k+1)}{2k+3} I_k = 4^{k+1}\frac{[(k+1)!]^2}{(2k+3)!}$ 0,5p
b) Cum funcţia $(1-t^2)^k$ este pară, folosind punctul a) vom obţine:
$\int_{-1}^1 (1-t^2)^k dt = 2 \cdot 4^k \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$ 1p
Efectuând schimbarea de variabilă $t = 2x - 1$, rezultă $\int_0^1 (1-x)^k x^k dx = \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$ 1,5p
Aşadar $x_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} \int_0^1 (1-x)^k x^k dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} 2[2x(1-x)^k] dx = 2\int_0^1 \frac{1-[2x(1-x)]^{n+1}}{1-2x(1-x)}$ 1p
Deoarece $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ 0,5p
rezultă $1 - \frac{1}{2^{n+1}} \leq 1 - [2x(1-x)]^{n+1} \leq 1$ 0,5p
$\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \int_0^1 \frac{2}{1-2x(1-x)} dx \leq x_n \leq \int_0^1 \frac{2}{1-2x(1-x)} dx$ 0,5p
Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 \frac{2}{1-2x(1-x)} dx = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+(2x-1)^2} = 2arctg(2x-1)\Big|_0^1 = \pi$ 0,5p
TOTAL **7p**